

Erlangen 1962

Zur Homologie-Theorie semi-simplizialer Ketten-Komplexe

von

Azmi Hanna

aus Jerusalem/Jordanien

Zur Homologie-Theorie

=====

semi-simplizialer Ketten-Komplexe

=====

der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von

Azmi Hanna

aus Jerusalem/Jordanien

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 1962

Dekan: Universitätsprofessor Dr. H.Volz

Erster Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G.Nöbeling

Zweiter Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. R. Remmert

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor

Dr. G.Nöbeling, möchte ich für wertvolle

Anregungen sowie für die freundliche

Unterstützung während der Durchführung

dieser Arbeit herzlichst danken



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548821_0112

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Kapitel 1. Homologie-Theorie semi-simplizialer Ketten-Komplexe als Satelliten-Theorie.

§ 1. Semi-simpliziale Ketten-Komplexe.

§ 2. Homologie-Moduln eines semi-simplizialen Ketten Komplexes.

§ 3. Beispiele.

Kapitel 2. Cohomologie-Theorie semi-simplizialer Coketten-Komplexe als Satelliten-Theorie.

§ 4. Cohomologie-Moduln eines semi-simplizialen Coketten-Komplexes.

§ 5. Beispiele.

Kapitel 3. Dualität.

§ 6. Dualität zwischen den Homologie-Moduln eines semi-simplizialen Ketten-Komplexes und den Cohomologie-Moduln des dualen semi-simplizialen Coketten-Komplexes.

Einleitung.

Die Homologie-Moduln eines semi-simplizialen Ketten-Komplexes (s.s.K.Komplex) sind leicht zu definieren-siehe Godement [5], Seite 46. In § 3 dieser Arbeit wird gezeigt, daß die Homologie-Moduln mancher Homologie-Theorien, etwa der singulären, Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes sind. Das veranlaßt zu einer axiomatischen Behandlung einer Homologie-Theorie über der Kategorie der s.s.K. Komplexe. In § 2 wird bewiesen, daß diese Theorie eine Satelliten-Theorie ist. In § 1 geben wir Definitionen und Sätze an, die für die Entwicklung der Sätze in § 2 erforderlich sind. Satz 1.3 spielt dabei die entscheidende Rolle.

Das duale Gegenstück zu einem s.s.K.Komplex nennen wir semi-simplizialen Coketten-Komplex (s.s.Ck.Komplex). Über der Kategorie der s.s.Ck.Komplexe entwickeln wir dual zu § 2 eine Cohomologie-Theorie, die eine Satelliten-Theorie ist. Die Beweise verlaufen dual und daher werden wir sie nicht angeben.

Im Kapitel 3 verallgemeinern wir die Pontrjagin'sche Dualität auf Moduln über beliebigen kommutativen Ringen Λ . Als Modul der Charaktere eines Moduls G definieren wir $\text{Hom}_{\Lambda}(G, Q)$, wobei Q ein besonders für unsere Zwecke konstruierter injektiver Modul ist. Anschließend wenden wir diese Dualität an für Homologie-Moduln eines s.s.K. Komplexes und die Cohomologie-Moduln des dualen s.s.Ck. Komplexes. Daraus ergibt sich die Dualität zwischen den Steenrod'schen Homologie-Gruppen und den Čech'schen Cohomologie-Gruppen.

Sätze und Definitionen werden in den einzelnen Kapiteln durchnummeriert; Satz 3.5 etwa ist der fünfte Satz aus Kapitel 3.

Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Diese Arbeit habe ich als Alexander-von-Humboldt-Stipendiat geschrieben. An dieser Stelle möchte ich dem Vorstand und allen Mitarbeitern der Alexander-von-Humboldt-Stiftung für die Gewährung eines zweijährigen Stipendiums meinen herzlichen Dank aussprechen .

Kapitel 1.

Homologie-Theorie semi-simplizialer Ketten-Komplexe als Satelliten-Theorie.

§ 1. Semi-simpliziale Ketten-Komplexe.

Alle Moduln und Homomorphismen, die hier auftreten sind Links-Moduln bzw. Links-Homomorphismen über einem festen Ring Λ mit Einselement $1 \neq 0$.

Definition 1.1. Ein semi-simplizialer Ketten-Komplex (s.s.K.Komplex) ist eine Folge $\{C_n\}_{n=0,1,\dots}$

von Moduln, verknüpft durch Homomorphismen

$$\varpi_n^i : C_n \longrightarrow C_{n-1} \quad (i=0,1,\dots,n),$$

die den Bedingungen

$$(1) \quad \varpi_{n-1}^i \varpi_n^j = \varpi_{n-1}^{j-1} \varpi_n^i \quad (0 \leq i < j \leq n)$$

genügen.

Wir schreiben

$$(2) \quad \mathcal{K} = \{C; \varpi\}.$$

Ein einfaches Beispiel eines s.s.K.Komplexes ist das folgende. G sei ein Modul. Jedes C_n sei gleich G gesetzt und jedes ϖ_n^i die Identität. Dieser s.s.K.Komplex heißt der konstante Komplex. Ist insbesondere $G = 0$, so wird dieser konstante Komplex mit ϖ bezeichnet.

Definition 1.2. Es seien $\mathcal{K}' = \{C'; \varpi'\}$ und $\mathcal{K} = \{C; \varpi\}$ zwei s.s.K.Komplexe. Eine Folge $\{\varphi_n\}_{n=0,1,\dots}$ von Homomorphismen $\varphi_n : C'_n \longrightarrow C_n$ mit

$$(3) \quad \varpi_n^i \varphi_n = \varphi_{n-1} \varpi_{n-1}^i \quad (i=0,1,\dots,n)$$

heißt ein Homomorphismus

$$(4) \quad \varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}.$$

Die Summe $\psi + \varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ zweier Homomorphismen $\varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ und $\psi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ ist die Folge

$$\{\psi_n + \varphi_n\}_{n=0,1,\dots}.$$

Die Komposition $\psi\varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}''$ zweier Homomorphismen $\varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ und $\psi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}''$ ist die Folge $\{\psi_n\varphi_n\}_{n=0,1,\dots}$.

Der Homomorphismus $\varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ heißt Monomorphismus (Epimorphismus, Isomorphismus, die Identität), wenn jedes $\varphi_n : C'_n \longrightarrow C_n$ ein Monomorphismus, (Epimorphismus, Isomorphismus, die Identität) ist.

Für einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ schreiben wir

$$(5) \quad \varphi : \mathcal{K}' \cong \mathcal{K}.$$

Definition 1.3. Es seien $\mathcal{K}' = \{C' ; \epsilon'\}$ und $\mathcal{K} = \{C ; \epsilon\}$ zwei s.s.K.Komplexe. $\mathcal{K}'$ heißt Unterkomplex von $\mathcal{K}$, in Zeichen

$$(6) \quad \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K},$$

wenn gilt

$$(i) \quad C'_n \subseteq C_n \quad (n=0,1,\dots)$$

$$(ii) \quad \epsilon'^1_n = \epsilon^1_n|_{C'_n} \quad (i=0,1,\dots,n).$$

Beispielsweise ist $\mathcal{K}'$ Unterkomplex jedes s.s.K. Komplexes.

Definition 1.4. Es seien $\mathcal{K}' = \{C' ; \epsilon'\}$ und $\mathcal{K} = \{C ; \epsilon\}$ s.s.K.Komplexe mit $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Es sei

$$C''_n = C_n / C'_n \text{ und } \epsilon''^1_n : C''_n \longrightarrow C''_{n-1} \text{ der von } \epsilon^1_n$$

induzierte natürliche Homomorphismus. Dann ist

$\mathcal{K}' = \{C'; \epsilon'\}$ ein s.s.K.Komplex; er heißt der Faktorkomplex von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$.

Wir schreiben

$$(7) \quad \mathcal{K}' = \mathcal{K} / \mathcal{K}'.$$

Satz 1.1. Es seien $\mathcal{K}' = \{C'; \epsilon'\}$ und $\mathcal{K} = \{C; \epsilon\}$ zwei s.s.K.Komplexe und $\varphi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ ein Homomorphismus.

(a) Die Familie $\mathcal{K} = \{K; \kappa\}$ mit

$$(8) \quad K_n = \text{Kern } \varphi_n \quad (n=0, 1, \dots)$$

$$(9) \quad \kappa_n^i = \epsilon_n'^i | K_n \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

ist ein s.s.K.Komplex;

(b) Die Familie $\mathcal{L} = \{B; \beta\}$ mit

$$(10) \quad B_n = \text{Bild } \varphi_n \quad (n=0, 1, \dots)$$

$$(11) \quad \beta_n^i = \epsilon_n^i | B_n \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

ist ein s.s.K.Komplex;

$$(c) \quad \mathcal{L} \cong \mathcal{K}' / \mathcal{K}.$$

Wir schreiben

$$(12) \quad \mathcal{K} = \text{Kern } \varphi; \mathcal{L} = \text{Bild } \varphi.$$

Beweis. (a). Aus $\epsilon_n'^i \varphi_n = \varphi_{n-1} \epsilon_n^i$ folgt

$$\kappa_n^i(K_n) \subseteq K_{n-1}. \text{ Also ist } (\epsilon_{n-1}^i \epsilon_n^j) | K_n = \kappa_{n-1}^i \kappa_n^j.$$

Wegen $\epsilon_{n-1}^i \epsilon_n^j = \epsilon_{n-1}^{j-1} \epsilon_n^i$ für jedes $i < j$, folgt

$$\kappa_{n-1}^i \kappa_n^j = \kappa_{n-1}^{j-1} \kappa_n^i \text{ für } i < j.$$

$$(b). \text{ Analog zu a: } \beta_n^i(B_n) \subseteq B_{n-1}, \beta_{n-1}^i \beta_n^j = \beta_{n-1}^{j-1} \beta_n^i$$

für $i < j$.

(c) folgt sofort aus der Definition eines Faktorkomplexes.

Eine Sequenz

$$(13) \quad \sigma \rightarrow \mathcal{L}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L} \xrightarrow{\psi} \mathcal{L}'' \rightarrow \sigma$$

heiße exakt, wenn

(i) Kern $\varphi = \sigma$, (ii) Bild $\varphi = \text{Kern } \psi$ und (iii) Bild $\psi = \mathcal{L}''$.

Exakt ist beispielsweise die Sequenz

$$\sigma \rightarrow \mathcal{L}' \xrightarrow{i} \mathcal{L} \xrightarrow{p} \mathcal{L}/\mathcal{L}'$$

wobei $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, i die identische Abbildung und p die kanonische Abbildung ist.

Definition 1.5. Die direkte Summe

$$(14) \quad \sum_j \mathcal{L}$$

s.s.K.Komplexe $\sum_j \mathcal{L} = \{ \sum_j C_n ; \sum_j \epsilon_n^i \}$ ist der s.s.K.Komplex

$$\mathcal{L} = \{ C_n ; \epsilon_n^i \}, \text{ wobei } C_n = \sum_j C_{jn} \text{ und } \epsilon_n^i = \sum_j \epsilon_{jn}^i.$$

Definition 1.6. Ein s.s.k.Komplex $\mathcal{P}$ heiße projektiv, wenn zu jedem Epimorphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ und jedem Homomorphismus $\chi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ ein Homomorphismus $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\chi = \varphi\psi$ existiert.

Satz 1.2. Die direkte Summe projektiver s.s.K.Komplexe ist genau dann projektiv, wenn jeder direkte Summand projektiv ist.

Beweis. Vergleiche Cartan-Eilenberg [1] Proposition 2.1, Seite 6.

Satz 1.3. Zu jedem s.s.K.Komplex $\mathcal{L} = \{ C ; \epsilon \}$ existiert ein projektiver s.s.K.Komplex $\mathcal{P} = \{ P ; \pi \}$ mit Epimorphismus $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$.

Beweis. Für jedes $n=0,1,\dots$ liege ein zunächst beliebiger Modul $P(n)$ mit einem Epimorphismus

$\gamma_n : P(n) \rightarrow C_n$ vor.

Es sei s_n ein n -dimensionales Simplex und $K(n)$ der von s_n aufgespannte simpliziale Komplex. Die p -dimensionalen Seiten von s_n seien mit x_p bezeichnet und die i -te Seite von x_p mit $d_i x_p$. Es gilt dann

$$(15) \quad d_i d_j x_p = d_{j-1} d_i x_p \quad \text{für } 0 \leq i < j \leq n.$$

Über $K(n)$ definieren wir eine Modulfamilie

$$(16) \quad \gamma(n) = \{ nS_{x_p} ; n\mathfrak{s}_{x_p}^i \}$$

von Moduln nS_{x_p} und Homomorphismen $n\mathfrak{s}_{x_p}^i : nS_{x_p} \rightarrow nS_{x_{p-1}}$

folgendermaßen :

$$(17) \quad \begin{aligned} nS_{x_p} &= P(n), \quad \text{und} \\ n\mathfrak{s}_{x_p}^i &= \begin{cases} \text{Identität, wenn } x_{p-1} = d_i x_p \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$n\mathfrak{s}_p$ sei die identische Abbildung von nS_{x_p} in $P(n)$.

Die über alle x_p genommene direkte Summe $\sum nS_{x_p}$ bzw. $\sum n\mathfrak{s}_{x_p}^i$ sei mit n^p bzw. $n\pi_p^i$ bezeichnet.

Es gilt $n\pi_{p-1}^i n\pi_p^j = n\pi_{p-1}^{j-1} n\pi_p^i$ für alle $i < j$.

Also ist

$$(18) \quad \mathcal{P}_n = \{ n^p ; n\pi_p^i \}_{p=0,1,\dots,n}, \quad n \text{ fest}$$

ein s.s.K.Komplex.

Es sei

$$(19) \quad \mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n = \{ P_p ; \pi_p^i \}.$$

Wir behaupten die Existenz eines Epimorphismus

$$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}.$$

Zum Beweis definieren wir für beliebiges

$x_p = d_{i_k} \dots d_{i_1} s_n \in K(n)$ einen Homomorphismus

$n\mu_{x_p} : nS_{x_p} \rightarrow C_p$ durch

$$(20) \quad n\mu_{x_p} = \sigma_{p+1}^{i_k} \dots \sigma_n^{i_1} \gamma_n n s_p.$$

Der so definierte Homomorphismus ist eindeutig. Denn

aus $d_{j_k} \dots d_{j_1} s_n = d_{i_k} \dots d_{i_1} s_n$ folgt wegen (1)

und (15), daß $\sigma_{p+1}^{j_k} \dots \sigma_n^{j_1} = \sigma_{p+1}^{i_k} \dots \sigma_n^{i_1}$.

Die direkte Summe $\sum n\mu_{x_p}$ ist ein Homomorphismus

$n\mu_p : nP_p \rightarrow C_p \cdot \{n\mu_p\}_{p=0,1,\dots}$ ist dann ein Homomorphismus $n\mu : P_n \rightarrow L$. Dafür muß gezeigt werden, daß das folgende Diagramm für jedes $j = 0, 1, \dots, p$ kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} nP_p & \xrightarrow{n\pi_p^j} & nP_{p-1} \\ n\mu_p \downarrow & & \downarrow n\mu_{p-1} \\ C_p & \xrightarrow{\sigma_p^j} & C_{p-1} \end{array}$$

$$\sigma_p^j n\mu_p = \sigma_p^j \sum \sigma_{p+1}^{i_k} \dots \sigma_n^{i_1} \gamma_n n s_p$$

$$= \sum \sigma_p^j \sigma_{p+1}^{i_k} \dots \sigma_n^{i_1} \gamma_n n s_p$$

$$= n\mu_{p-1} n\pi_p^j.$$

Die direkte Summe $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu_p$ ist ein Homomorphismus

$\mu_p : P_p \rightarrow C_p \cdot \{\mu_p\}_{p=0,1,\dots}$ ist dann ein

Homomorphismus $\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{L}$. Dafür muß gezeigt werden, daß das folgende Diagramm für jedes $i=0,1,\dots,p$ kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} P_p & \xrightarrow{\pi_p^i} & P_{p-1} \\ \mu_p \downarrow & & \downarrow \mu_{p-1} \\ C_p & \xrightarrow{\epsilon_p^i} & C_{p-1} \end{array}$$

n_p^v sei die Injektion von n_p^P in P_p . Dann gelten die folgenden drei Gleichungen :

$$(21) \quad \mu_p n_p^v = n_p^{\mu_p} \quad ,$$

$$(22) \quad \mu_{p-1} n_{p-1}^v = n_{p-1}^{\mu_{p-1}} \quad ,$$

$$(24) \quad \pi_p^i n_p^v = n_{p-1}^v n_p^{\pi_p^i} \quad .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (\epsilon_p^i \mu_p) n_p^v &= \epsilon_p^i n_p^{\mu_p} && \text{nach (21)} \\ &= n_{p-1}^{\mu_{p-1}} n_p^{\pi_p^i} && \text{nach dem eben Bewiesenen} \\ &= \mu_{p-1} n_{p-1}^v n_p^{\pi_p^i} && \text{nach (22)} \\ &= (\mu_{p-1} \pi_p^i) n_{p-1}^v && \text{nach (23)} \quad . \end{aligned}$$

Also ist

$$\mu_{p-1} \pi_p^i = \epsilon_p^i \mu_p \quad \text{für jedes } i=0,1,\dots,p \quad .$$

Schließlich ist μ ein Epimorphismus ; denn $\mu_p = \epsilon_p$ ist ein Epimorphismus, und folglich μ_p für jedes $p=0,1,\dots$ ein Epimorphismus .

Nun wählen wir jedes $P(n)$ als projektiven Modul.
Wir behaupten, daß $\mathcal{P}$ projektiv ist.

Da die direkte Summe projektiver s.s.K.Komplexe projektiv ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{P}_n$ für jedes $n=0,1,\dots$ projektiv ist.

Es seien $\mathcal{T}_n = \{T_n; \tau_n^i\}$ und $\mathcal{W}_n = \{W_n; \omega_n^i\}$ zwei s.s.K.Komplexe, $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{W}$ ein Epimorphismus und $\chi: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{W}$ ein Homomorphismus. Zu zeigen ist die Existenz eines Homomorphismus $\psi: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{T}$ mit $\varphi\psi = \chi$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P}_n & & \\
 & \swarrow \psi & \downarrow \chi & & \\
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{W} & \rightarrow & 0 \quad (\text{exakt})
 \end{array}$$

Da $\varphi_n: T_n \rightarrow W_n$ ein Epimorphismus, $\chi_n: {}_n P_n \rightarrow W_n$ ein Homomorphismus und ${}_n P_n = P(n)$ projektiv ist, existiert ein Homomorphismus $\psi_n: {}_n P_n \rightarrow T_n$ mit $\varphi_n \psi_n = \chi_n$.

Für beliebiges $x_p = d_{i_k} \dots d_{i_1} s_n$ definieren wir einen Homomorphismus $\psi_{x_p}: {}_n S_{x_p} \rightarrow T_p$ durch

$$(24) \quad \psi_{x_p} = \tau_{p+1}^{i_k} \dots \tau_n^{i_1} \psi_n n s_p$$

und setzen $\psi_p = \sum_{x_p} \psi_{x_p}$.

Dann ist erstens $\tau_p^j \psi_p = \psi_{p-1} n \pi_p^j$ für jedes $j=0,1,\dots,p$.

$$\begin{aligned}
 \text{Denn } \tau_p^j \psi_p &= \sum \tau_p^j \psi_{x_p} = \sum \tau_p^j \tau_{p+1}^{i_k} \dots \tau_n^{i_1} \psi_n n s_p \\
 &= \psi_{p-1} n \pi_p^j.
 \end{aligned}$$

Zweitens ist $\varphi_p \psi_p = \chi_p$.

$$\begin{aligned}
 \text{Denn } \varphi_p \psi_p &= \varphi_p \sum \tau_{p+1}^{i_k} \dots \tau_n^{i_1} \psi_n \text{ n } \mathfrak{s}_p \\
 &= \sum \varphi_p \tau_{p+1}^{i_k} \dots \tau_n^{i_1} \psi_n \text{ n } \mathfrak{s}_p \\
 &= \sum \omega_{p+1}^{i_k} \varphi_{p+1} \tau_{p+2}^{i_{k-1}} \dots \tau_n^{i_1} \psi_n \text{ n } \mathfrak{s}_p \\
 &= \sum \omega_{p+1}^{i_k} \dots \omega_n^{i_1} \varphi_n \psi_n \text{ n } \mathfrak{s}_p \\
 &= \sum \omega_{p+1}^{i_k} \dots \omega_n^{i_1} \chi_n \text{ n } \mathfrak{s}_p \\
 &= \sum \omega_{p+1}^{i_k} \dots \chi_{n-1} \text{ n } \pi_n^{i_1} \\
 &= \sum \chi_p \text{ n } \pi_{p+1}^{i_k} \dots \pi_n^{i_1} \\
 &= \chi_p .
 \end{aligned}$$

Satz 1.4. Ist $P(n)$ projektiv, so auch $\mathcal{Y}(n)$.

Beweis. Vergleiche Gerstner [4] , Satz 1, § 1 .

§ 2. Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes.

Es sei $\mathcal{L} = \{C; \partial\}$ ein s.s.K.Komplex. Eine p-Kette ($p=0,1,\dots$) ist ein Element aus C_p .

Der Rand-Operator

$$(1) \quad \partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1} \quad (p=1,2,\dots)$$

wird definiert durch

$$\partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \epsilon_p^i, \quad \partial_0(C_0) = 0.$$

Wie üblich zeigt man, daß

$$(2) \quad \partial_{p-1} \partial_p = 0, \quad (p=1,2,\dots)$$

Wir definieren Untermoduln von C_p folgendermaßen:

$$(3) \quad Z_p = \text{Kern } \partial_p \quad (\text{Modul der } p\text{-Zyklen})$$

$$(4) \quad B_p = \text{Bild } \partial_{p+1} \quad (\text{Modul der } p\text{-Ränder}).$$

Aus (2) folgt $B_p \subseteq Z_p$ für jedes $p=0,1,\dots$

Definition 1.7.

$$(5) \quad H_p(\mathcal{L}) = Z_p / B_p \quad (p=0,1,\dots)$$

heißt der p-te Homologie-Modul des s.s.K.Komplexes $\mathcal{L}$.

Satz 1.5. Es seien $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}$ zwei s.s.K.Komplexe und $\varphi: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ ein Homomorphismus. Dann induziert φ für jedes $p=0,1,\dots$ einen Homomorphismus

$$(6) \quad H_p(\varphi) : H_p(\mathcal{L}') \rightarrow H_p(\mathcal{L})$$

mit folgenden Eigenschaften :

(a) Ist φ die Identität, so auch $H_p(\varphi)$;

(b) $H_p(\psi + \varphi) = H_p(\psi) + H_p(\varphi)$ für Homomorphismen

$\varphi: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ und $\psi: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$;

(c) $H_p(\psi\varphi) = H_p(\psi)H_p(\varphi)$ für Homomorphismen $\varphi: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$

und $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$.

Beweis. Wegen $\varphi_{p-1} \epsilon_p^1 = \epsilon_p^1 \varphi_p$ ist $\varphi_{p-1} \partial'_p = \partial_p \varphi_p$.

Also induziert φ für jedes $p=0,1,\dots$ einen Homomorphismus $H_p(\varphi) : H_p(\mathcal{K}) \longrightarrow H_p(\mathcal{L})$.

Die drei Eigenschaften (a), (b) und (c) sind dann leicht nachzuweisen.

Satz 1.6. Es seien $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}''$ drei s.s.K. Komplexe und φ, ψ Homomorphismen derart, daß die Sequenz

$$\sigma \longrightarrow \mathcal{K}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{K}'' \longrightarrow \sigma$$

exakt ist. Dann existiert ein Homomorphismus

$$\partial_p^* : H_p(\mathcal{K}') \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{K}') \quad (p=1,2,\dots)$$

mit folgenden Eigenschaften :

(a) die sequenz

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{p+1}^*} H_p(\mathcal{K}') \xrightarrow{H_p(\varphi)} H_p(\mathcal{K}) \xrightarrow{H_p(\psi)} H_p(\mathcal{K}'') \xrightarrow{\partial_p^*} H_{p-1}(\mathcal{K}') \xrightarrow{H_{p-1}(\varphi)} \dots \\ &\xrightarrow{\partial_1^*} H_0(\mathcal{K}') \xrightarrow{H_0(\varphi)} H_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{H_0(\psi)} H_0(\mathcal{K}'') \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ist exakt ;

(b) das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longrightarrow & \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}'' \longrightarrow \sigma \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ \sigma & \longrightarrow & \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}'' \longrightarrow \sigma \end{array}$$

mit exakten Zeilen sei kommutativ. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} H_p(\mathcal{K}') & \xrightarrow{\partial_p^*} & H_{p-1}(\mathcal{K}') \\ \downarrow H_p(\varphi') & & \downarrow H_{p-1}(\varphi') \\ H_p(\mathcal{K}'') & \xrightarrow{\partial_p^*} & H_{p-1}(\mathcal{K}'') \end{array}$$

Beweis. Der verknüpfende Homomorphismus

$\partial_p^* : H_p(\mathcal{L}') \rightarrow H_p(\mathcal{L}')$ wird definiert durch

$$(7) \quad \partial_p^*(c_p + B_p) = \varphi_{p-1}^{-1} \partial_p' \varphi_p^{-1}(c_p) + B_{p-1},$$

wobei $c_p \in \mathbb{Z}_p$.

Für einen ausführlichen Beweis siehe Eilenberg-Steenrod [2].

Satz 1.7. Für jeden projektiven s.s.K.Komplex und jedes $p \geq 1$ ist $H_p(\mathcal{L}) = 0$.

Beweis. Es sei $\mathcal{P}$ der in Satz 1.3 konstruierte projektive s.s.K.Komplex mit Epimorphismus $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$.

Da $\mathcal{L}$ projektiv ist, existiert ein Homomorphismus $\nu : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}$ mit $\mu\nu = \text{Identität}$.

Nach Satz 1.5 gilt für die induzierten Homomorphismen $H_p(\nu) : H_p(\mathcal{L}) \rightarrow H_p(\mathcal{P})$ und $H_p(\mu) : H_p(\mathcal{P}) \rightarrow H_p(\mathcal{L})$ die Gleichung $H_p(\mu)H_p(\nu) = \text{Identität}$.

Um zu zeigen, daß $H_p(\mathcal{L}) = 0$ genügt es daher zu zeigen, daß $H_p(\mathcal{P}) = 0$ ist.

Wegen $\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, ist $H_p(\mathcal{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} H_p(\mathcal{P}_n)$.

Also genügt es zu zeigen, daß $H_p(\mathcal{P}_n) = 0$ für jedes $n=0,1,\dots$. $H_p(\mathcal{P}_n)$ ist aber mit $H_p(\mathcal{Y}(n))$ identisch. Denn die Begriffe Kette und Rand in $\mathcal{P}_n$ und $\mathcal{Y}(n)$ fallen zusammen. Da $\mathcal{Y}(n)$ eine projektive Modulfamilie über einem simplizialen Komplex $K(n)$ ist, gilt $H_p(\mathcal{Y}(n)) = 0$ für jedes $p \geq 1$ - siehe Nöbeling [9].

Satz 1.8. Für einen s.s.K.Komplex $\mathcal{L}$ sind die Homologie-Moduln $H_p(\mathcal{L})$ isomorph zu den Links-Satelliten von $H_0(\mathcal{L}) : H_p \cong S_p H_0$ für alle $p=0,1,\dots$

Beweis. Nach Satz 1.5 ist H_p ein covarianter (additiver) Funktor. Nach Satz 1.6 ist die Sequenz der Funktoren $\{H_p\}_{p=0,1,\dots}$ verknüpft. Die Behauptung des Satzes folgt aus Cartan-Eilenberg [1], Theorem 5.1, c.3, Seite 46, da für die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'' \rightarrow 0$$

mit projektivem $\mathcal{L}$ nach Satz 1.6 und Satz 1.7 folgt, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow H_{p+1}(\mathcal{L}'') \rightarrow H_p(\mathcal{L}') \rightarrow H_p(\mathcal{L})$$

exakt ist.

§ 3. Beispiele.

Beispiel 1. Homologie-Moduln einer Modulfamilie über einem semi-simplizialen Komplex als Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes.

Definition 1.8. Ein semi-simplizialer Komplex X ist eine Gesamtheit von Elementen, Simplexe genannt mit folgenden zwei Funktionen :

- (a) die erste Funktion ordnet jedem $x \in X$ eine ganze Zahl $p \geq 0$ zu. Dann heißt x ein p -dimensionales Simplex oder ein p -Simplex und wird mit x_p bezeichnet;
- (b) die zweite Funktion ordnet jedem p -Simplex und

jeder ganzen Zahl i mit $0 \leq i \leq p$ einen Operator (Seiten-Operator) d_i zu. Dabei werden von d_i die folgenden

zwei Eigenschaften verlangt :

(1) $d_i x_p$ ist ein $(p-1)$ -Simplex, die i -te Seite von x_p .

(2) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ für $0 \leq i < j \leq p$.

Jedem Simplex $x_p \in X$ sei einen Modul G_{x_p} und jedem d_i einen Homomorphismus $\vartheta_{x_p}^i : G_{x_p} \rightarrow G_{x_{p-1}}$ mit den Eigenschaften

(3) $\vartheta_{x_p}^i = 0$, wenn nicht $x_{p-1} = d_i x_p$,
 $\vartheta_{x_{p-1}}^i \vartheta_{x_p}^j = \vartheta_{x_{p-1}}^{j-1} \vartheta_{x_p}^i$ für $0 \leq i < j \leq p$

zugeordnet.

C_p bzw. $\mathfrak{C}_p^i$ sei die direkte Summe $\sum G_{x_p}$ bzw.

$\sum \vartheta_{x_p}^i$ über alle p -Simplexe $x_p \in X$. Dann erfüllen die

$(p+1)$ Homomorphismen $\mathfrak{C}_p^0, \dots, \mathfrak{C}_p^p$ von C_p in C_{p-1} die Vertauschungsregel

(4) $\mathfrak{C}_{p-1}^i \mathfrak{C}_p^j = \mathfrak{C}_{p-1}^{j-1} \mathfrak{C}_p^i$ für $0 \leq i < j \leq p$.

Also ist $\mathfrak{L} = \{ C_p ; \mathfrak{C}_p^i \}_{p=0,1,\dots}$ ein s.s.K.Komplex,

für welchen alles in § 2 Bewiesenen gilt.

Bildet man direkte Produkte $\prod G_{x_p}$ bzw. $\prod \vartheta_{x_p}^i$

statt der direkten Summen $\sum G_{x_p}$ bzw. $\sum \vartheta_{x_p}^i$, so

bleibt $\mathcal{L}$ ein s.s.K.Komplex, denn die so gewonnenen Homomorphismen erfüllen die Vertauschungsregel (4).

Beispiel 2. Singuläre Homologie-Moduln eines topologischen Raumes als Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes.

Definition 1.9. Es sei Δ_p ein p -Simplex bestehend aus den Ecken $a_0 < \dots < a_p$ und Δ_{p-1} ein $(p-1)$ -Simplex bestehend aus den Ecken $a'_0 < \dots < a'_{p-1}$.

Für jedes $i=0,1,\dots,p$ ist die Zuordnung

$$(5) \quad e_p^i(a'_j) = \begin{cases} a_j, & \text{wenn } j < i \\ a_{j+1}, & \text{wenn } i \leq j \end{cases}$$

eine simpliziale Abbildung

$$(6) \quad \varepsilon_p^i : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$$

mit der Eigenschaft

$$(7) \quad \varepsilon_p^j \varepsilon_{p-1}^i = \varepsilon_p^i \varepsilon_{p-1}^{j-1} \quad \text{für } 0 \leq i < j \leq p.$$

Es sei E ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung

$$(8) \quad T_p : \Delta_p \longrightarrow E$$

heißt ein singuläres p -Simplex.

Die Zuordnung

$$(9) \quad d_i T_p = T_p \varepsilon_p^i$$

definiert wegen (7) ein singuläres $(p-1)$ -Simplex $d_i T_p$

mit der Eigenschaft

$$(10) \quad d_i d_j T_p = d_{j-1} d_i T_p \quad \text{für } 0 \leq i < j \leq p.$$

Also ist die Gesamtheit der singulären Simplexe des topologischen Raumes E ein semi-simplizialer Komplex $X(E)$. Wie in Beispiel (1) gewinnt man einen s.s.K.Komplex $\mathcal{K}$. Die Homologie-Moduln von $\mathcal{K}$ heißen die singulären Homologie-Moduln des Raumes E .

Beispiel 3. Steenrod'sche Homologie-Gruppen als Homologie-Gruppen eines s.s.K.Komplexes.

Alle Definitionen und Sätze, die hier vorkommen sind Steenrod [11] entnommen. Für Beweise sei auf diese Arbeit verwiesen. Alle simplizialen Komplexe, die in Betracht gezogen werden enthalten abzählbar unendlich viele Simplexe, und jede Ecke eines Simplexes sei sternfinit.

Es sei E ein kompakter metrischer Raum und K ein simplizialer Komplex. Eine reguläre Abbildung von K in E ist eine Funktion f auf den Ecken von K mit Werten in E , so daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt : für fast alle Simplexe von K , haben die f -Bilder Durchmesser $< \varepsilon$.

Eine reguläre p -Kette ist eine Gesamtheit von drei Objekten : ein Komplex A , eine reguläre Abbildung $f : A \rightarrow E$ und eine $(p+1)$ -Kette c_{p+1} des Komplexes A mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G . In Zeichen (A, f, c_{p+1}) .

Eine reguläre p -Kette (A, f, c_{p+1}) heißt ein regulärer Zyklus, wenn c_{p+1} ein Zyklus ist.

Zwei reguläre p -Zyklen (A_1, f_1, c_{p+1}^1) , (A_2, f_2, c_{p+1}^2)

heißen homolog (geschrieben $\sim$), wenn eine $(p+1)$ -Kette (A, f, c_{p+2}) existiert, so daß A_1, A_2 abgeschlossene Unterkomplexe von A sind, $f|_{A_1} = f_1$, $f|_{A_2} = f_2$ und

$$c_{p+2} = c_{p+1}^1 - c_{p+1}^2 .$$

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Damit definiert $\sim$ eine Homologie-Klasseneinteilung der regulären Zyklen. Zwei Klassen sind entweder identisch oder besitzen einen leeren Durchschnitt.

Die Summe zweier regulären p -Ketten (A_1, f_1, c_{p+1}^1) und (A_2, f_2, c_{p+1}^2) sei die reguläre p -Kette $(A, f, c_{p+1}^1 + c_{p+1}^2)$, wobei A die direkte Summe ohne Identifizierungen von A_1 und A_2 ist und $f|_{A_1} = f_1$, $f|_{A_2} = f_2$.

Es gilt der folgende Satz.

Die Summe zweier Homologie-Klassen ist eindeutig definiert durch die Klasse, die die Summe zweier Repräsentanten der Klassen enthält. Die so definierte Addition bestimmt Homologie-Gruppen $H_p(E)$, $p = -1, 0, 1, \dots$ des Raumes E . $H_p(E)$ heißt die p -te Steenrod'sche Homologie-Gruppe. Es ist $H_{-1}(E) = 0$. Ist die Koeffizienten Gruppe kompakt, so ist $H_p(E)$, $p = 0, 1, \dots$ der p -ten Čech'schen Homologie-Gruppe $\check{H}_p(E)$ des Raumes E isomorph :

$$H_p(E) \cong \check{H}_p(E) .$$

Es sei K der durch E definierte Fundamentalkomplex (siehe Steenrod [11], Seite 840).

Es gilt der folgende Satz.

Die $(p+1)$ -te Homologie-Gruppe $H_{p+1}(K)$ der unendlichen Zyklen von K mit Koeffizienten in einer Gruppe G ist der p -ten Steenrod'schen Homologie-Gruppe $H_p(E)$ des Raumes E isomorph : $H_{p+1}(K) \cong H_p(E)$.

Wie in Beispiel (1) kann man die Homologie-Gruppen $H_p(K)$ als Homologie-Gruppen eines s.s.K.Komplexes betrachten, wobei aber, da es sich um unendliche Zyklen handelt, direkte Produkte statt direkter Summen auftreten. Also sind nach dem eben erwähnten Satz die Steenrod'schen Homologie-Gruppen als Homologie-Gruppen eines s.s.K.Komplexes darstellbar.

Definition 1.10. Der Ring Λ sei kommutativ. Es seien $\mathcal{K} = \{C ; \partial\}$ und $\mathcal{G} = \{G ; \gamma\}$ zwei s.s.K.Komplexe. Das Tensor-Produkt $\mathcal{K} \otimes \mathcal{G}$ sei der s.s.K.Komplex

$$\{C_q \otimes G_q ; \partial_q^1 \otimes \gamma_q^1\} .$$

Beispiel 4. Universelles Koeffiziententheorem für Homologie.

Λ sei ein kommutativer Hauptidealring, $\mathcal{K} = \{C ; \partial\}$ ein s.s.K.Komplex bestehend aus lauter freien Moduln und $\mathcal{G} = \{G ; \gamma\}$ ein s.s.K.Komplex, in dem jedes G_q gleich einem festen Modul G ist. Z_q bzw. B_q sei der Modul der q -Zyklen bzw. der q -Ränder von $\mathcal{K}$. $\text{Tor}(H_q(\mathcal{K}), \mathcal{G})$ sei der Kern des Homomorphismus $i' : B_q \otimes G \rightarrow Z_q \otimes G$, wobei i' der von der Inklusion $i : B_q \rightarrow Z_q$ induzierte Homomorphismus ist. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \otimes G \rightarrow H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Da der Funktor $\otimes$ rechts-exakt ist, liefert die exakte Sequenz

$$(11) \quad 0 \rightarrow B_q \rightarrow Z_q \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \rightarrow 0$$

die exakte Sequenz

$$(12) \quad B_q \otimes G \rightarrow Z_q \otimes G \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \otimes G \rightarrow 0.$$

Da Λ ein Hauptidealring ist, ist B_{q-1} ein freier Modul, und da $B_{q-1} \cong C_q / Z_q$, ist Z_q ein direkter Summand von C_q .

Also liefert die exakte Sequenz

$$(13) \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{U}$$

wobei $\mathcal{Z} = \{Z_q; 0\}$ und $\mathcal{L} = \{B_{q-1}; 0\}$, die exakte Sequenz

$$(14) \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}$$

(14) liefert die exakte Homologie-Sequenz

$$(15) \quad \dots \rightarrow H_{q+1}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow H_q(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

Wegen $H_{q+1}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \cong B_q \otimes G$, $H_q(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{G}) \cong Z_q \otimes G$, ist die

Sequenz (15) nichts anderes als

$$(16) \quad \dots \rightarrow B_q \otimes G \rightarrow Z_q \otimes G \rightarrow H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow B_{q-1} \otimes G \rightarrow \dots$$

Die Exaktheit von

$$(17) \quad 0 \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow B_{q-1} \otimes G \rightarrow Z_{q-1} \otimes G$$

ist klar.

Damit haben wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Identitäten i.

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_q \otimes G & \rightarrow & Z_q \otimes G & \rightarrow & H_q(\mathcal{L}) \otimes G & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow i & & \downarrow i & & & & \\
 B_q \otimes G & \rightarrow & Z_q \otimes G & \rightarrow & H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) & \rightarrow & B_{q-1} \otimes G \rightarrow Z_{q-1} \otimes G \\
 & & & & & \downarrow i & \downarrow i \\
 & & & & 0 \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) & \rightarrow & B_{q-1} \otimes G \rightarrow Z_{q-1} \otimes G .
 \end{array}$$

Dieses Diagramm liefert die exakte Sequenz

$$(18) \quad 0 \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \otimes G \rightarrow H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow 0 .$$

Nehmen wir für $\mathcal{G}$ den konstanten s.s.K.Komplex und identifizieren wir $c \otimes g$, $c \in C_q$, $g \in G$ mit cg und $H_q(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G})$ mit $H_q(\mathcal{L}; \mathcal{G})$, so erhalten wir das universelle Koeffiziententheorem für Homologie :

die Sequenz

$$0 \rightarrow H_q(\mathcal{L}) \otimes G \rightarrow H_q(\mathcal{L}; \mathcal{G}) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

ist exakt.

Da die Steenrod'schen Homologie-Gruppen als Homologie-Gruppen eines s.s.K.Komplexes darstellbar sind, gilt auch hier diese Aussage.

Kapitel 2.

Cohomologie-Theorie semi-simplizialer Coketten-Komplexe als Satelliten-Theorie.

Wie in der Einleitung erwähnt, geben wir in diesem Kapitel die dualen Definitionen und Sätze von Kapitel 1. Auf die Beweise gehen wir nicht ein.

Definition 2.1. Ein semi-simplizialer Coketten-
Komplex (s.s.Ck.Komplex) ist eine Folge $\{C^n\}_{n=0,1,\dots}$
von Moduln, verknüpft durch Homomorphismen

$$\sigma_n^i : C^n \longrightarrow C^{n+1} \quad (i=0,1,\dots,n+1),$$

die den Bedingungen

$$(1) \quad \sigma_{n+1}^j \sigma_n^i = \sigma_{n+1}^i \sigma_n^{j-1} \quad (0 \leq i < j \leq n+2)$$

genügen.

Wir schreiben

$$(2) \quad \mathcal{C} = \{C ; \sigma\}.$$

Die Definitionen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$
($\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$ sind s.s.Ck.Komplexe), Unterkomplex $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$,
Faktorkomplex $\mathcal{C}' = \mathcal{C} / \mathcal{C}'$, Bild φ , Kern φ und direktes
Produkt $\prod_j \mathcal{C}_j$ s.s.Ck.Komplexe ${}_j \mathcal{C} = \{ {}_j C^n ; {}_j \sigma_n^i \}$
sind klar.

Definition 2.2. Ein s.s.Ck.Komplex $\mathcal{C}$ heiße injektiv,
wenn zu jedem Monomorphismus $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ und jedem
Homomorphismus $\chi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Homomorphismus
 $\psi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\chi = \psi \varphi$ existiert.

Satz 2.1. Das direkte Produkt injektiver s.s.Ck. Komplexe ist genau dann injektiv, wenn jeder direkte Faktor injektiv ist.

Satz 2.2. Zu jedem s.s.Ck.Komplex $\mathcal{L} = \{C; \sigma\}$ existiert ein injektiver s.s.Ck.Komplex $\mathcal{G} = \{Q; \pi\}$ mit Monomorphismus $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$.

§ 4. Cohomologie-Moduln eines s.s.Ck.Komplexes.

Es sei $\mathcal{L} = \{C; \sigma\}$ ein s.s.Ck.Komplex. Eine p-Cokette ($p=0,1,\dots$) ist ein Element aus C^p .

Der Corand-Operator

$$(1) \quad \delta_p : C^p \rightarrow C^{p+1} \quad (p=0,1,\dots)$$

wird definiert durch

$$\delta_p = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma_p^i$$

Wie üblich zeigt man, daß

$$(2) \quad \delta_{p+1} \delta_p = 0, \quad (p=0,1,\dots)$$

Wir definieren Untermoduln von C^p folgendermaßen :

$$(3) \quad Z^p = \text{Kern } \delta_p \quad (\text{Modul der } p\text{-Cozyklen})$$

$$(4) \quad B^p = \text{Bild } \delta_{p-1} \quad (\text{Modul der } p\text{-Coränder})$$

$$B^0 = 0.$$

Aus (2) folgt, daß $B^p \subseteq Z^p$ für jedes $p=0,1,\dots$

Definition 2.3.

$$(5) \quad H^p(\mathcal{L}) = Z^p/B^p \quad (p=0,1,\dots)$$

heißt der p-te Cohomologie-Modul des s.s.Ck.Komplexes.

Satz 2.3. Es seien $\mathcal{K}'$ und $\mathcal{K}$ zwei s.s.Ck.Komplexe
und $\varphi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ ein Homomorphismus. Dann induziert φ
für jedes $p=0,1,\dots$ einen Homomorphismus

$$(6) \quad H^p(\varphi) : H^p(\mathcal{K}') \rightarrow H^p(\mathcal{K})$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist φ die Identität, so auch $H^p(\varphi)$;
 (b) $H^p(\psi + \varphi) = H^p(\psi) + H^p(\varphi)$ für Homomorphismen
 $\varphi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ und $\psi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$;
 (c) $H^p(\psi\varphi) = H^p(\psi)H^p(\varphi)$ für Homomorphismen $\varphi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$
und $\psi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}''$.

Satz 2.4. Es seien $\mathcal{K}', \mathcal{K}$ und $\mathcal{K}''$ drei s.s.Ck.
Komplexe und φ, ψ Homomorphismen derart, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{K}'' \rightarrow 0$$

exakt ist. Dann existiert ein Homomorphismus

$$\delta_p^* : H^p(\mathcal{K}') \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{K}') \quad (p=0,1,\dots)$$

mit folgenden Eigenschaften :

- (a) die Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{K}') \xrightarrow{H^0(\varphi)} H^0(\mathcal{K}) \xrightarrow{H^0(\psi)} H^0(\mathcal{K}'') \xrightarrow{\delta_0^*} H^1(\mathcal{K}') \xrightarrow{H^1(\varphi)} \dots$$

$$\xrightarrow{\delta_{p-1}^*} H^p(\mathcal{K}') \xrightarrow{H^p(\varphi)} H^p(\mathcal{K}) \xrightarrow{H^p(\psi)} H^p(\mathcal{K}'') \xrightarrow{\delta_p^*} H^{p+1}(\mathcal{K}') \xrightarrow{H^{p+1}(\varphi)} \dots$$

ist exakt ;

- (b) das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{K}' & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K}'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow s' & & \downarrow s & & \downarrow s'' \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{K}' & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K}'' \rightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen sei kommutativ. Dann ist das folgende
Diagramm kommutativ :

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(\mathcal{L}'') & \xrightarrow{\delta_p^*} & H^{p+1}(\mathcal{L}') \\
 H^p(\mathcal{L}') \downarrow & & \downarrow H^{p+1}(\mathcal{L}') \\
 H^p(\mathcal{L}'') & \xrightarrow{\delta_p} & H^{p+1}(\mathcal{L}')
 \end{array}$$

Satz 2.5. Für jeden injektiven s.s.Ck.Komplex $\mathcal{L}$ und jedes $p \geq 1$ ist $H^p(\mathcal{L}) = 0$.

Satz 2.6. Für einen s.s.Ck.Komplex $\mathcal{L}$ sind die Cohomologie-Moduln $H^p(\mathcal{L})$ isomorph zu den Rechts-Satelliten von $H^0(\mathcal{L})$: $H^p \cong S^p H^0$ für alle $p=0,1,\dots$

§ 5. Beispiele.

Beispiel 5. Cohomologie-Moduln einer Modulfamilie über einem semi-simplizialen Komplex als Cohomologie-Moduln eines s.s.Ck.Komplexes.

Es sei X ein semi-simplizialer Komplex. Jedem Simplex $x_p \in X$ sei ein Modul G_{x_p} und jedem d_i einen Homomorphismus $\mathfrak{s}_{x_p}^i : G_{x_p} \rightarrow G_{x_{p+1}}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{s}_{x_p}^i = 0, \text{ wenn nicht } x_p = d_i x_{p+1} \\
 (1) \quad &\mathfrak{s}_{x_{p+1}}^j \mathfrak{s}_{x_p}^i = \mathfrak{s}_{x_{p+1}}^i \mathfrak{s}_{x_p}^{j-1} \text{ für } 0 \leq i < j \leq p+2
 \end{aligned}$$

zugeordnet.

G^p bzw. $\mathfrak{G}_p^i$ sei das direkte Produkt $\prod G_{x_p}$ bzw. $\prod \mathfrak{s}_{x_p}^i$ über alle p -Simplexe $x_p \in X$.

Dann erfüllen die $(p+2)$ Homomorphismen $\epsilon_p^0, \dots, \epsilon_p^{p+1}$ von C^p in C^{p+1} die Vertauschungsregel

$$(2) \quad \epsilon_{p+1}^j \epsilon_p^i = \epsilon_{p+1}^i \epsilon_p^{j-1} \quad \text{für } 0 \leq i < j \leq p+2.$$

Also ist $\mathcal{L} = \{C^p; \epsilon_p^i\}_{p=0,1,\dots}$ ein s.s.Ck.

Komplex, für welchen alles in § 4 gilt.

Bildet man direkte Summen $\sum G_{x_p}$ bzw. $\sum s_{x_p}^i$ statt der direkten Produkte $\prod G_{x_p}$ bzw. $\prod s_{x_p}^i$, so bleibt $\mathcal{L}$ ein s.s.Ck.Komplex, denn die so gewonnenen Homomorphismen erfüllen die Vertauschungsregel (2).

Beispiel 6. Singuläre Cohomologie-Moduln eines topologischen Raumes als Cohomologie-Moduln eines s.s.Ck.Komplexes.

Über dem semi-simplizialen Komplex $X(E)$ -Definition 1.9- gewinnt man wie in Beispiel (5) einen s.s.Ck.Komplex $\mathcal{L}$. Die Cohomologie-Moduln von $\mathcal{L}$ heißen die singulären Cohomologie-Moduln des Raumes E .

Beispiel 7. Steenrod'sche Cohomologie-Gruppen als Cohomologie-Gruppen eines s.s.Ck.Komplexes.

Es sei E ein kompakter metrischer Raum und K der durch E definierte Fundamentalkomplex. Wegen der Isomorphie $H_{p+1}(K) \cong H_p(E)$ -Beispiel 3- kann man die p -te Steenrod'sche Cohomologie-Gruppe des Raumes E als die $(p+1)$ -te Cohomologie-Gruppe der endlichen Cozyklen von K definieren, die man wie in Beispiel 5,

wobei aber statt der direkten Produkte direkte Summen auftreten, als Cohomologie-Gruppen eines s.s.Ck.Komplexes gewinnen kann.

Definition 2.4. Der Ring Λ sei kommutativ. Es sei $\mathcal{L} = \{C; \partial\}$ ein s.s.K.Komplex und $\mathcal{G} = \{G; \delta\}$ ein s.s.Ck.Komplex. $\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ sei der s.s.Ck.Komplex

$$\left\{ \text{Hom}(C_q, G^q); \text{Hom}(\partial_{q+1}^i, \delta_q^i) \right\}.$$

Beispiel 8. Universelles Koeffiziententheorem für Cohomologie.

Λ sei ein kommutativer Hauptidealring. $\mathcal{L} = \{C; \partial\}$ sei ein s.s.K.Komplex bestehend aus lauter freien Moduln und $\mathcal{G} = \{G; \delta\}$ ein s.s.Ck.Komplex, in dem jedes G^q gleich einem festen Modul G ist. Z_q bzw. B_q sei der Modul der q -Zyklen bzw. der q -Ränder von $\mathcal{L}$.

$\text{Ext}(H_q(\mathcal{L}), \mathcal{G})$ sei der Modul $\text{Hom}(B_q, G)/\text{Bild } i'$, wobei

$i' : \text{Hom}(Z_q, G) \rightarrow \text{Hom}(B_q, G)$ der von der Inklusion

$i : B_q \rightarrow Z_q$ induzierte Homomorphismus. Dann ist die

Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow H^q(\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G})) \rightarrow \text{Hom}(H_q(\mathcal{L}), \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

exakt.

Kapitel 3.

Dualität .

§ 6. Dualität zwischen den Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes und den Cohomologie-Moduln des dualen s.s.Ck.Komplexes.

Im folgenden übertragen wir die Definitionen und die Sätze des Dualitätsprinzips von Pontrjagin auf Moduln, soweit dies möglich ist. Der Ring Λ sei kommutativ.

Satz 3.1. Es existiert ein injektiver Modul Q mit folgender Eigenschaft : zu jedem in Λ echt enthaltenen Ideal $\mathcal{J}$ und jedem Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow Q$ existiert ein $s \in Q$ mit $s \neq 0$ und $\varphi(\lambda) = \lambda s$ für jedes $\lambda \in \mathcal{J}$.

Beweis. Wir konstruieren den Modul Q folgendermaßen. Es sei M die Menge aller in Λ echt enthaltenen Ideale $\mathcal{J}$. Dann ist $1 \notin \mathcal{J}$, da sonst $\mathcal{J} = \Lambda$ wäre. Wir bilden die direkte Summe $\sum \Lambda/\mathcal{J}$ über alle $\mathcal{J} \in M$ und betten den so gewonnenen Modul in einen injektiven Modul Q ein. Dann hat Q die gewünschte Eigenschaft.

Zunächst existiert zu jedem Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow Q$ ein $s \in Q$ mit $\varphi(\lambda) = \lambda s$ für alle $\lambda \in \mathcal{J}$ -siehe Cartan-Eilenberg [1], Proposition 3.2, Seite 8-.

Um ein $s \neq 0$ zu finden, unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1. Es existiert ein $\lambda \in \mathcal{J}$ mit $\varphi(\lambda) \neq 0$, dann existiert ein $s \in Q$ mit $\lambda s = \varphi(\lambda) \neq 0$. Also ist $s \neq 0$.

Fall 2. Es ist $\varphi(\lambda) = 0$ für jedes $\lambda \in \mathcal{J}$. In diesem

Falle wählen wir für s die Restklasse $(1) \in \Lambda/\mathcal{J}$, die

das Einselement enthält. Dann ist $s \neq 0$ und

$\varphi(\lambda) = \lambda(1) = (\lambda) =$ der Klasse, die λ enthält $z(0) \in Q$.

Definition 3.1. Es sei Q der in Satz 3.1 konstruierte injektive Modul. G sei ein Modul. Ein Charakter von G ist ein Homomorphismus von G in Q . Die Menge aller Charaktere von G in Q ist dann ein Modul $X(G)$.

$$(1) \quad X(G) = \text{Hom}(G, Q) .$$

Satz 3.2. Es sei G ein Modul, G_1 ein Untermodul von G , g ein Element aus G , das G_1 nicht angehört und $\alpha \in X(G_1)$. Dann existiert ein $\beta \in X(G)$ mit folgenden zwei Eigenschaften :

$$(a) \quad \alpha = \beta|_{G_1} ;$$

$$(b) \quad \beta(g) \neq 0 .$$

Beweis. Es sei H der von G_1 und g erzeugte Modul. Zunächst wird ein Charakter $\gamma \in X(H)$ konstruiert, der eine Erweiterung von α darstellt und für welchen $\gamma(g) \neq 0$ gilt.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. Es existiert kein $\lambda \neq 0$ in Λ mit $\lambda g \in G_1$.

In diesem Falle besitzt jedes Element $y \in H$ eine eindeutige Darstellung in der Form $y = x + \lambda g$, $x \in G_1$, $\lambda \in \Lambda$. Man wähle ein beliebiges $s \neq 0$ aus Q und setze $\gamma(y) = \gamma(x + \lambda g) = \alpha(x) + \lambda s$. Dann ist die so definierte Abbildung γ von H in Q ein Homomorphismus mit $\alpha = \gamma|_{G_1}$ und $\gamma(g) = s \neq 0$.

Fall 2. Es existieren $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda g \in G_1$. Dann bildet die Menge aller λ mit dieser Eigenschaft ein Ideal

$\mathcal{I}$ in Λ . $\mathcal{I}$ enthält das Einselement nicht, da sonst wäre $g \in G_1$. In diesem Falle besitzt jedes Element $y \in H$ wenigstens eine Darstellung $y = x + \lambda g$, $x \in G_1$ und $\lambda \in \Lambda$.

Die Zuordnung

$$\lambda \longrightarrow \alpha(\lambda g), \lambda \in \mathcal{I}$$

ist ein Homomorphismus $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow Q$.

Nach Satz 3.1 existiert ein $s \neq 0$ aus Q mit

$$\varphi(\lambda) = \alpha(\lambda g) = \lambda s \text{ für jedes } \lambda \in \mathcal{I}.$$

Man halte dieses s fest und setze

$$\gamma(y) = \alpha(x) + \lambda s.$$

Die so definierte Abbildung γ von H in Q ist ein

Homomorphismus. Dafür muß gezeigt werden, daß sie

eindeutig ist. Es seien $x_1 + \lambda_1 g$ und $x_2 + \lambda_2 g$ zwei

Darstellungen von y . Wegen $(\lambda_2 - \lambda_1)g = x_1 - x_2 \in G_1$,

ist $\lambda_2 - \lambda_1 \in \mathcal{I}$. Also ist

$$\varphi(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha((\lambda_2 - \lambda_1)g) = (\lambda_2 - \lambda_1)s = \alpha(x_1 - x_2).$$

Also ist $\alpha(x_1) + \lambda_1 s = \alpha(x_2) + \lambda_2 s$. Oder

$$\gamma(x_1 + \lambda_1 g) = \gamma(x_2 + \lambda_2 g).$$

Damit ist γ ein Homomorphismus von H in Q mit

$\gamma(g) \neq 0$ und $\alpha = \gamma|_{G_1}$. Da Q injektiv ist, läßt sich

γ zu einem $\beta \in \chi(G)$ erweitern.

Bemerkung. Ist der Ring Λ einfach, so fällt

Fall 2 aus und Q ist ein injektiver Obermodul von Λ .

Definition 3.2. Ist G_1 ein Untermodul von G , so

bezeichne $A(G_1)$ die Menge aller Charaktere $\alpha \in \chi(G)$ mit

$\alpha(g) = 0$ für jedes $g \in G_1$. $A(G_1)$ ist offenbar ein Modul.

Er heißt der Annulator von G_1 in $X(G)$.

Es ist klar, daß $A(G) = 0$, und $A(G_2) \subseteq A(G_1)$

falls $G_1 \subseteq G_2$

Ähnlich bezeichne $A(\Phi)$, wobei Φ ein Untermodul von $X(G)$ ist, den Untermodul aller $g \in G$ mit $\alpha(g) = 0$ für jedes $\alpha \in \Phi$. Es ist $A(\Phi_2) \subseteq A(\Phi_1)$ falls $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$.

Satz 3.3. Ist G_1 ein Untermodul von G , so ist $A(A(G_1)) = G_1$.

Beweis. Setze $\Phi = A(G_1)$ und $\bar{G}_1 = A(\Phi)$. Zunächst ist $G_1 \subseteq \bar{G}_1$. Denn ist $g \in G_1$, so ist $\alpha(g) = 0$ für jedes $\alpha \in \Phi$. Also ist $g \in \bar{G}_1$. Es sei $\bar{g} \in \bar{G}_1$ und $\bar{g} \notin G_1$.

Nach Satz 3.2 existiert ein $\beta \in X(\bar{G}_1)$, das eine Erweiterung von α darstellt und für welches $\beta(\bar{g}) \neq 0$ ist. Da aber $\beta(g) = \alpha(g) = 0$ für jedes $g \in G_1$, ist $\beta \in \Phi$ und damit $\beta(\bar{g}) = 0$, was ein Widerspruch ist.

Satz 3.4. Es sei G_1 ein Untermodul von G und $\Phi = A(G_1)$. Dann ist

(a) $X(G_1) \cong X(G)/\Phi$;

(b) $X(G/G_1) \cong \Phi$.

Beweis. (a). Die Zuordnung

$$\alpha \longrightarrow \bar{\alpha} = \alpha|_{G_1}, \quad \alpha \in X(G)$$

ist ein Homomorphismus $\varphi: X(G) \longrightarrow X(G_1)$.

Da φ injektiv ist, existiert zu jedem $\bar{\alpha} \in X(G_1)$ ein $\alpha \in X(G)$ mit $\bar{\alpha} = \alpha|_{G_1}$. Also ist φ ein Epimorphismus. α gehört genau dann dem Kern von φ an, wenn $\alpha \in \Phi$.

Also ist $X(G_1) \cong X(G)/\Phi$.

(b). Es sei $\alpha \in \mathfrak{F}$ und U eine Restklasse von G/G_1 mit dem Repräsentanten $g \in G$. Die Zuordnung

$$\alpha \longrightarrow \alpha^* \text{ mit } \alpha^*(U) = \alpha(g) \in Q$$

ist von der zufälligen Wahl des Repräsentanten g unabhängig. Also ist diese Zuordnung ein Homomorphismus

$$\eta: \mathfrak{F} \longrightarrow X(G/G_1) .$$

Der Kern von η ist die Null; denn ist $\alpha \in \mathfrak{F}$ mit $\eta(\alpha) = 0$, so ist $\alpha(g) = 0$ für jedes $g \in G$. Also ist $\alpha = 0$.

η ist außerdem ein Epimorphismus. Denn die Zuordnung $g \longrightarrow \alpha^*(G_1 + g)$, $g \in G$, $\alpha^* \in X(G/G_1)$ ist ein Homomorphismus $\alpha: G \longrightarrow Q$ mit $\alpha \in \mathfrak{F}$.

Also ist η ein Isomorphismus $\mathfrak{F} \cong X(G/G_1)$.

Satz 3.5. Es seien G_1 und G_2 Untermodul von G mit

$G_1 \subseteq G_2$, $\mathfrak{F}_1 = A(G_1)$ und $\mathfrak{F}_2 = A(G_2)$. Dann ist

$$X(G_2/G_1) \cong \mathfrak{F}_1/\mathfrak{F}_2 .$$

Beweis. Da G_2/G_1 Untermodul von G/G_1 ist, ist

$$\text{nach Satz 3.4 } X(G_2/G_1) \cong X(G/G_1)/A(G_2/G_1) \cong \mathfrak{F}_1/A(G_2/G_1) .$$

Also bleibt nur zu zeigen, daß $A(G_2/G_1) \cong \mathfrak{F}_2$.

Wegen der Isomorphie $G/G_2 \cong G/G_1/G_2/G_1$ ist

$$X(G/G_2) \cong X(G/G_1/G_2/G_1) .$$

Also ist $\mathfrak{F}_2 \cong \text{Annulator von } G_2/G_1 \text{ in } X(G/G_1)$.

Satz 3.6. Es seien G_1 und G_2 zwei Moduln und

$f: G_1 \longrightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann induziert f einen Homomorphismus

$$X(f): X(G_2) \longrightarrow X(G_1)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Ist f die Identität, so auch $X(f)$;

(b) $X(f_1 + f_2) = X(f_1) + X(f_2)$ für Homomorphismen

$$f_1, f_2 : G_1 \rightarrow G_2 ;$$

(c) $X(f_2 f_1) = X(f_1) X(f_2)$ für Homomorphismen

$$f_1 : G_1 \rightarrow G_2 \text{ und } f_2 : G_2 \rightarrow G_3 .$$

Beweis. $X(f)$ wird folgendermaßen definiert.

Es sei $f \in X(G_2)$ und $x \in G_1$, so ist $X(f)f(x) = f(x) \in Q$.

Die Eigenschaften (a), (b) und (c) weist man leicht nach.

Also ist X ein additiver contravarianter Funktor.

Außerdem ist X ein exakter Funktor. Dies folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 3.7. Es seien G_1, G_2 zwei Moduln und

$f : G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt

(a) $\text{Kern} X(f) = A(\text{Bild } f) ;$

(b) $\text{Bild} X(f) = A(\text{Kern } f) .$

Beweis. (a). Ist $f \in A(\text{Bild } f)$, so gilt für jedes $x \in G_1$ die Gleichung $X(f)f(x) = 0$. Also ist $A(\text{Bild } f) \subseteq \text{Kern} X(f)$.

Umgekehrt ist $X(f)f = 0$, so ist $f(x) = 0 = X(f)f(x)$ für jedes $x \in G_1$. Also ist $\text{Kern} X(f) \subseteq A(\text{Bild } f)$.

(b). Wegen der Isomorphie $f(G_1) \cong G_1 / (\text{Kern } f)$, gilt

$X(f(G_1)) \cong X(G_1 / \text{Kern } f) \cong A(\text{Kern } f)$. Da $f(G_1)$ Untermodul von G_2 ist, ist $X(f(G_1)) \cong X(G_2) / A(f(G_1))$. Nach (a) ist

$X(G_2 / A(f(G_1))) \cong X(G_2) / \text{Kern} X(f) \cong \text{Bild} X(f)$.

Also ist $\text{Bild} X(f) \cong A(\text{Kern } f)$.

Nun beweisen wir einen Dualitätssatz zwischen den Homologie-Moduln eines s.s.K.Komplexes und den Cohomologie-Moduln des dualen s.s.Ck.Komplexes, und zwar auf zwei verschiedene Weisen. Der erste Beweis folgt sofort aus den vorhergehenden Sätzen.

Es sei $\mathcal{L} = \{C; \partial\}$ ein s.s.K.Komplex. Dann ist $X(\mathcal{L}) = \{X(C_p); X(\partial_{p+1}^i)\}$ ein s.s.Ck.Komplex. Da X ein contravarianter additiver Funktor ist, gilt

$$(5) \quad X(\partial_p) = \delta_{p-1} \quad (p=1, 2, \dots)$$

Satz 3.8. $X(H_p(\mathcal{L})) \cong H^p(X(\mathcal{L}))$.

Beweis 1. Nach Satz 3.7.a ist

$$Z^p = \text{Kern } \delta_p = \text{Kern } X(\partial_{p+1}) = A(\text{Bild } \partial_{p+1}) = A(B_p).$$

Nach Satz 3.7.b ist

$$B^p = \text{Bild } \delta_{p-1} = \text{Bild } X(\partial_p) = A(\text{Kern } \partial_p) = A(Z_p).$$

Nach Satz 3.5 ist dann

$$X(Z_p/B_p) \cong A(B_p)/A(Z_p) \cong Z^p/B^p.$$

Also ist $X(H_p(\mathcal{L})) \cong H^p(X(\mathcal{L}))$.

Beweis 2. Für $p = 0$ ist $X(H_0(\mathcal{L})) = X(C_0/B_0) \cong$

$$A(B_0) \cong Z^0 = H^0(X(\mathcal{L})).$$

Zur Durchführung einer vollständigen Induktion wird angenommen, daß $X(H_{p-1}(\mathcal{L})) \cong H^{p-1}(X(\mathcal{L}))$.

Es sei

$$(6) \quad \sigma \rightarrow \xi \xrightarrow{\varphi} \eta \xrightarrow{\psi} \zeta \rightarrow \sigma$$

eine beliebige exakte Sequenz mit η projektiv.

Dann ist

$$(7) \quad H_p(\mathcal{P}) = 0 \text{ für jedes } p \geq 1 \quad \text{-Satz 1.7-}$$

Da X ein exakter contravarianter Funktor ist, ist die Sequenz

$$(8) \quad \mathcal{U} \longrightarrow X(\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi^*} X(\mathcal{P}) \xrightarrow{\varphi^*} X(\mathcal{L}') \longrightarrow \mathcal{U},$$

wobei $\psi^* = X(\psi)$, $\varphi^* = X(\varphi)$ exakt

Da $\mathcal{P}$ projektiv ist, ist

$$(9) \quad H^p(X(\mathcal{P})) = 0 \text{ für jedes } p \geq 1 \quad \text{-Nöbeling 9 -}.$$

Wegen (7) induziert (6) eine exakte Sequenz

$$(10) \quad 0 \longrightarrow H_p(\mathcal{L}) \xrightarrow{\Delta_p} H_{p-1}(\mathcal{L}') \xrightarrow{H_{p-1}(\varphi)} H_{p-1}(\mathcal{P}), \quad p \geq 1.$$

Dann ist

$$(11) \quad X(H_{p-1}(\mathcal{P})) \xrightarrow{H_{p-1}(\varphi)^*} X(H_{p-1}(\mathcal{L}')) \xrightarrow{\Delta_{p-1}^*} X(H_p(\mathcal{L})) \longrightarrow 0,$$

wobei $H_{p-1}(\varphi)^* = X(H_{p-1}(\varphi))$, $\Delta_{p-1}^* = X(\Delta_p)$

eine exakte Sequenz.

Wegen (9) induziert (8) eine exakte Sequenz

$$(12) \quad H^{p-1}(X(\mathcal{P})) \xrightarrow{H^{p-1}(\varphi)} H^{p-1}(X(\mathcal{L}')) \xrightarrow{\Delta^{p-1}} H^p(X(\mathcal{L})) \longrightarrow 0, \quad p \geq 1.$$

Also ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p-1}(X(\mathcal{P})) & \xrightarrow{H^{p-1}(\varphi)} & H^{p-1}(X(\mathcal{L}')) & \xrightarrow{\Delta^{p-1}} & H^p(X(\mathcal{L})) & \longrightarrow & 0 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & & & \\ X(H_{p-1}(\mathcal{P})) & \xrightarrow{H_{p-1}(\varphi)^*} & X(H_{p-1}(\mathcal{L}')) & \xrightarrow{\Delta_{p-1}^*} & X(H_p(\mathcal{L})) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ und hat nach Induktionsannahme Isomorphismen α, β .

Wir behaupten die Existenz eines Isomorphismus

$$(13) \quad \gamma : H^p(X(\mathcal{L})) \longrightarrow X(H_p(\mathcal{L})),$$

der das Diagramm kommutativ ergänzt.

Da Δ^{p-1} ein Epimorphismus ist, existiert zu jedem $y \in H^p(X(\mathcal{L}))$ ein $y' \in H^{p-1}(X(\mathcal{L}'))$ mit $\Delta^{p-1}y' = y$.

Es sei $\gamma y = \Delta_{p-1}^* \beta y'$ gesetzt. Dann ist γy eindeutig:

es seien y', y'' zwei Elemente aus $H^{p-1}(X(\mathcal{L}'))$ mit

$\Delta^{p-1}y' = \Delta^{p-1}y'' = y$. Da $y' - y'' \in \text{Kern } \Delta^{p-1}$ existiert wegen der Exaktheit der oberen Zeile des Diagramms ein $z \in H^{p-1}(X(\mathcal{Q}))$ mit $H^{p-1}(\varphi^*)z = y' - y''$.

Wegen $\beta H^{p-1}(\varphi^*) = H_{p-1}(\varphi^*)\alpha$, ist

$$\beta H^{p-1}(\varphi^*)z = H_{p-1}(\varphi^*)\alpha z = \beta(y' - y'') \in \text{Bild } H_{p-1}(\varphi^*).$$

Wegen der Exaktheit der unteren Zeile des Diagramms, ist $\text{Bild } H_{p-1}(\varphi^*) = \text{Kern } \Delta_{p-1}^*$. Also ist

$$\beta(y' - y'') \in \text{Kern } \Delta_{p-1}^*. \text{ D.h. } \Delta_{p-1}^* \beta y' = \Delta_{p-1}^* \beta y'' = \gamma y.$$

Also ist γ zunächst ein Homomorphismus. Da aber β ein Isomorphismus und Δ_{p-1}^* ein Epimorphismus ist, ist γ

ein Epimorphismus. Es bleibt noch zu zeigen, daß γ ein Monomorphismus ist. Es sei $y \in H^p(X(\mathcal{L}))$ mit $\gamma y = 0$,

dann ist $\Delta_{p-1}^* \beta y' = 0$ für ein $y' \in H^{p-1}(X(\mathcal{L}'))$. Also ist

$\beta y' \in \text{Kern } \Delta_{p-1}^*$. Wegen der Exaktheit der unteren

Zeile des Diagramms existiert ein $y'' \in X(H_{p-1}(\mathcal{Q}))$ mit

$H_{p-1}(\varphi^*)y'' = \beta y'$. Da α ein Isomorphismus ist, existiert

ein $z \in H^{p-1}(X(\mathcal{Q}))$ mit $\alpha z = y''$. Da β ein Isomorphismus ist,

folgt aus $H_{p-1}(\varphi^*)\alpha z = \beta H^{p-1}(\varphi^*)z = \beta y'$, daß

$H^{p-1}(\varphi^*)z = y'$. Aus der Exaktheit der oberen Zeile des

Diagramms folgt, daß $y' \in \text{Kern } \Delta^{p-1}$. Also ist $y = \Delta^{p-1}y' = 0$.

Bemerkung. Um den Dualitätssatz 3.8 zu beweisen, genügt es, für Q einen beliebigen injektiven Modul anzunehmen, aber dann gilt Satz 3.3 nicht.

Satz 3.9. Es sei E ein kompakter metrischer Raum und $H^p(E, G)$ die p -te Čech'sche Cohomologie-Gruppe von E mit Koeffizienten aus einer diskreten Gruppe G . Dann ist $\check{H}^p(E, G) \cong H_p(E, \chi(G))$, wobei $H_p(E, \chi(G))$ die p -te Steenrod'sche Homologie-Gruppe von E und $\chi(G)$ die im Sinne von Pontrjagin genommene Charaktergruppe von G ist.

Beweis. Es sei K der durch E definierte Fundamental-komplex. $H^{p+1}(K, G)$ sei die $(p+1)$ -te Cohomologie-Gruppe der endlichen Cozyklen von K mit Koeffizienten in G .

Dann ist $\chi H^{p+1}(K, G)$ isomorph der $(p+1)$ -te Homologie-Gruppe der unendlichen Zyklen von K mit Koeffizienten in $\chi(G)$: $\chi H^{p+1}(K, G) \cong H_{p+1}(K, \chi(G))$. Da $\chi(G)$ kompakt ist, ist $H_{p+1}(K, \chi(G)) \cong H_p(E, \chi(G))$; also ist

$H^{p+1}(K, G) \cong \check{H}^p(E, G)$. Wegen der Isomorphie

$H_{p+1}(K, G) \cong H_p(E, G)$ ist $\chi(\check{H}^p(E, G)) \cong H_p(E, \chi(G))$.

Literaturverzeichnis.

Es werden nur die in dieser Arbeit unmittelbar benutzten Quellen angegeben.

- (1) H.Cartan - S.Eilenberg : Homological Algebra, Princeton 1956.
- (2) S.Eilenberg - N.Steenrod : Foundations of Algebraic Topology, Princeton 1952.
- (3) Eilenberg - Zilber : Semi-simplicial Complexes and Singular Homology, Annals of Mathematics 51, 1950.
- (4) O.Gerstner : Homologie-Moduln über Abelschen Halbgruppen. Bestimmung der Čech'schen Homologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring, Bonner Mathematischen Schriften Nr. 12, 1960.
- (5) R. Godement : Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, Hermann, 1958.
- (6) E.Luft : Eine verallgemeinerung der Čech'schen Homologie-Theorie, Bonner Mathematische Schriften Nr. 8, 1958.
- (7) G.Nöbeling : Cohomologie-Moduln über abelschen Halbgruppen, Bonner Mathematische Schriften Nr. 12, 1960.
- (8) G. Nöbeling : Bestimmung der Čech'schen Cohomologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring über X , Bonner Mathematische Schriften Nr. 12, 1960.
- (9) G.Nöbeling : Über die Derivierten des inversen und des direkten Limes einer Modulfamilie, Topology 1, Volume 1, 1962.
- (10) L.Pontrjagin : Topologische Gruppen I,II, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1958.
- (11) N.Steenrod : Regular cycles of compact metric spaces, Annals of Mathematics 41, 1940.

Lebenslauf.

Am 21.2.34 wurde ich in Jerusalem/Jordanien geboren.

Von 1939 - 48 besuchte ich die "Terra Sancta School" in Jerusalem/Jordanien und danach bis Sommer 1952 das "Rashidiyya College" in Jerusalem/Jordanien.

Im Jahre 1951 bestand ich das "London University Matriculation examination" und im Sommer 1952 das "London University Intermediate examination". Danach nahm ich bis 1955 das Fern-Studium der Mathematik am Cambridge Correspondence College auf.

Von 1952 - 55 war ich als Senior Lehrer der Mathematik an St. George's Upper School in Jerusalem/Jordanien tätig.

Im September 1955 kam ich nach Erlangen, wo ich nach zwei Semestern die Vordiplomprüfung in Mathematik, naturwissenschaftliche Richtung, ablegte. Im Sommer 1958 bestand ich die Diplomprüfung in Mathematik.

Von 1958 - 60 nahm ich meine Lehrtätigkeit in Jordanien wieder auf.

Als mir das Alexander-von-Humboldt-Stipendium zum Studium an deutschen Hochschulen verliehen wurde, kam ich im Juli 1960 nach Erlangen zurück, um in Mathematik zu promovieren.

Ab 1. Oktober 1962, werde ich als "Lecturer" für Mathematik an der Universität Baghdad/Irak tätig sein.

GEDRUCKT BEI LUDWIG MÖLLER ERLANGEN